

VJEROVATNOĆA GREŠKE ZA FSK SISTEME

Izraze za izračunavanje vjerovatnoće greške u prenosu digitalnih signala FSK sistemima izvešćemo za slučaj koherentne demodulacije i za slučaj nekoherentne demodulacije sa dva filtra i dva detektora anvelope i izvršiti njihovo poređenje.

1. *Vjerovatnoća greške u sistemima sa koherentnom demodulacijom*

Objašnjen je način rada koherentnog demodulatora binarnih FSK signala. Za analizu uticaja šuma smatraćemo da na ulazu ovog sistema postoji aditivni bijeli Gaussov šum.

Posmatrajmo signalizacione intervale u kojima se šalju binarni digiti 1, kojima na strani predaje odgovara sinusoidalni nosilac učestanosti f_1 . Tada će u tački E_1 signal biti:

$$\begin{aligned} u_{E_1}(t) &= u_{s1}(t) + n_1(t) = U_s(t) \cos \omega_1 t + n_1(t) = \\ &= [U_s(t) + n_{c1}(t)] \cos \omega_1 t + n_{s1}(t) \sin \omega_1 t \end{aligned}$$

U tom istom signalizacionom intervalu u donjoj grani nema signala. U tački E_2 postoji samo šum, tj.:

$$u_{E_2}(t) = n_2(t) = n_{c2}(t) \cos \omega_2 t + n_{s2}(t) \sin \omega_2 t$$

Signal na izlazu (u tački G) je:

$$u_1(t) - u_2(t) = D[U_S(t) + n_{c1}(t) - n_{c2}(t)], \quad D = \text{const}$$

Pretpostavimo sada da se šalju binarni digiti 0. Njima na strani predaje odgovara sinusoidalni nosilac učestanosti f_2 . Slično prethodnom razmatranju, u gornjoj grani imamo samo šum, a u donjoj i signal i šum. Na ulaz odabirača dolazi rezultatni signal:

$$u_1(t) - u_2(t) = D[-U_S(t) + n_{c1}(t) - n_{c2}(t)]$$

Vrijednosti uzetih odbiraka su:

$$u_i = u_1(t_m) - u_2(t_m) = U + n_c$$

U je amplituda odbiraka signala i ima jednu od dvije moguće vrijednosti:

$$U = D\{\pm U_S(t_m)\} = D\{\pm U_0\}$$

Sa n_c je označena vrijednost odbirka koji potiče od ukupnog šuma i može imati vrijednost:

$$n_c = D[n_{c1}(t_m) - n_{c2}(t_m)] = D(n_{c1} - n_{c2})$$

Šumovi $n_1(t)$ i $n_2(t)$ predstavljaju Gaussove slučajne procese čije su srednje vrijednosti 0, međusobno nezavisne, pa su i slučajne promenljive n_{C1} i n_{C2} takođe nezavisne. Varijanse šumova n_{C1} i n_{C2} su jednake i iznose σ^2 , pa kako je varijansa sume, odnosno razlike nezavisnih slučajnih promjenljivih jednaka sumi varijansi svake od njih, to je i n_C Gaussova slučajna promenljiva čija je varijansa $\sigma_e^2 = D^2 2\sigma^2$.

Na osnovu rečenog, zaključuje se da se ovaj slučaj svodi na određivanje vjerovatnoće greške u prenosu polarnog binarnog signala u prisustvu aditivnog bijelog Gaussovog šuma. Poznato je da je u tom slučaju vjerovatnoća greške data izrazom:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{U_0}{\sqrt{2}\sigma}$$

Zamjenom odgovarajućih vrijednosti amplitude odbiraka i varijanse šuma dobija se izraz za vjerovatnoću greške u prenosu poruka binarnim FSK signalom i koherentnom demodulacijom:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{DU_s(t_m)}{\sqrt{2}\sqrt{D^2 2\sigma^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{U_s(t_m)}{2\sigma} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{U_0}{2\sigma}$$

2. Vjerovatnoća greške u sistemima sa detektorom anvelope (nekoherentna demodulacija)

Slično prethodnom razmatranju, možemo odrediti vjerovatnoću greške.

Pretpostavimo prvo da se šalju binarni digiti 1 kojima na strani predaje odgovara sinusoidalni signal učestanosti f_1 . Neka je šum aditivni bijeli Gaussov $n_1(t)$, čija je varijansa σ^2 . U tom slučaju, signal u tački E_1 je suma signala i šuma:

$$u_{E_1}(t) = u_s(t) \cos \omega_1 t + n_1(t) = V_1(t) \cos[\omega_1 t - \theta_1(t)], \quad u_1(t) = V_1(t)$$

U ovom istom signalizacionom intervalu, na izlazu iz detektora u donjoj grani postoji samo šum čiji je napon $u_2(t)$ vrlo približno ravan anvelopi uskopojasnog šuma $n_2(t)$ u tački E_2 . Detektovani napon u donjoj grani je:

$$u_2(t) = V_2(t)$$

Ako sa $P(e|1)$ označimo vjerovatnoću greške kada se šalje binarna jedinica, ona će biti jednaka vjerovatnoći da razlika odbiraka $u_1(t_m) = u_1$ i $u_2(t_m) = u_2$ bude negativna

$$P(e|1) = P(u_1 - u_2 < 0)$$

Pretpostavimo sada da se šalju binarni digiti 0. Tada će u donjoj grani postojati signal i šum, a u gornjoj samo šum. Slično se dolazi do zaključka da će vjerovatnoća greške u ovom slučaju biti:

$$P(e|0) = P(u_1 - u_2 > 0)$$

Ukupna vjerovatnoća greške je sada:

$$P_e = P(1)P(e|1) + P(0)P(e|0)$$

Izraz se može pojednostaviti ako uvedemo pretpostavku da su vjerovatnoće slanja 1 i 0 jednake i:

$$P(e|1) = P(e|0) \quad P(1) = P(0) = \frac{1}{2}$$

$$P_e = P(e|1) = P(u_2 > u_1)$$

Potrebno je naći vjerovatnoću da je $u_2 > u_1$. To se može uraditi na osnovu funkcije gustine vjerovatnoće anvelope uskopojasnog šuma, koju karakteriše Rayleigh-eva raspodjela:

$$p_U(u_2) = \frac{u_2}{\sigma^2} e^{-\frac{u_2^2}{2\sigma^2}}$$

i funkcije gustine vjerovatnoće amplitude sume uskopojasnog signala i uskopojasnog šuma, koju karakteriše Rice-ova raspodjela:

$$p_V(u_1) = \frac{u_1}{\sigma^2} e^{-\frac{u_1^2 + U_S^2(t_m)}{2\sigma^2}} I_0 \left[u_1 \frac{U_S(t_m)}{\sigma^2} \right]$$

Vjerovatnoća $u_2 > u_1$ (u_1 je zadata vrijednost) je:

$$\int_{u_2=u_1}^{\infty} p_U(u_2) du_2$$

Vjerovatnoća da se napon na izlazu iz detektora u gornjoj grani nalazi između u_1 i $u_1 + du_1$ je:

$$p_V(u_1) du_1$$

Prema tome, vjerovatnoća da je $u_2 > u_1$ i da u_1 bude između u_1 i $u_1 + du_1$ iznosi:

$$p_V(u_1) du_1 \int_{u_2=u_1}^{\infty} p_U(u_2) du_2$$

I na kraju, vjerovatnoća greške u prenosu, odnosno, vjerovatnoća da je, uopšte uzevši, $u_2 > u_1$ za sve vrijednosti u_1 od 0 do ∞ iznosi:

$$P_e = P(u_2 > u_1) = \int_0^{\infty} p_V(u_1) \int_{u_2=u_1}^{\infty} p_U(u_2) du_1 du_2$$

Ako uvrstimo ovo u izraz za vjerovatnoću greške, dobija se:

$$P_e = \int_0^{\infty} \frac{u_1}{\sigma^2} e^{-\frac{u_1^2 + U_s(t_m)}{2\sigma^2}} I_0 \left[u_1 \frac{U_s(t_m)}{\sigma^2} \right] \int_{u_2=u_1}^{\infty} \frac{u_2}{\sigma^2} e^{-\frac{u_2^2}{2\sigma^2}} du_1 du_2$$

Kada se riješi unutrašnji integral po u_2 , dobija se:

$$P_e = \int_0^{\infty} \frac{u_1}{\sigma^2} e^{-\frac{u_1^2}{\sigma^2}} e^{-\frac{U_s^2(t_m)}{2\sigma^2}} I_0 \left[u_1 \frac{U_s(t_m)}{\sigma^2} \right] du_1, \text{ smjena } z = \sqrt{2}u_1$$

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{U_s^2(t_m)}{4\sigma^2}} \int_0^{\infty} \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2 + \frac{1}{2}U_s^2(t_m)}{2\sigma^2}} I_0 \left[z \frac{U_s(t_m)}{\sqrt{2}\sigma^2} \right] dz$$

Integrand u poslednjem izrazu predstavlja funkciju gustine vjerovatnoće koja karakteriše Riceovu raspodjelu. Kako se integracija obavlja u granicama od 0 do ∞ , to ovaj integral, po definiciji, mora biti jednak 1. Prema tome, izraz za vjerovatnoću greške u prenosu poruka binarnim FSK signalom i nekoherentnom demodulacijom, definitivno iznosi:

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{U_s^2(t_m)}{4\sigma^2}}$$

Na kraju, interesantno je izvršiti poređenje FSK sistema sa koherentnom i nekoherentnom demodulacijom. Na osnovu izvedenih izraza za vjerovatnoću greške, za iste vrijednosti odnosa $U_s(t_m)/2\sigma$, vjerovatnoća greške je manja u sistemu sa koherentnom demodulacijom.

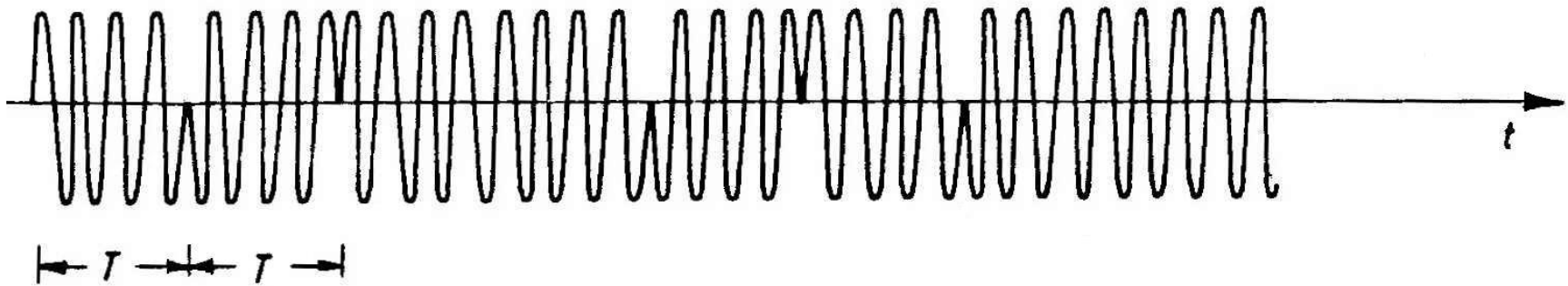
Međutim, u slučaju da je odnos $U_s(t_m)/2\sigma \gg 1$, izraz za vjerovatnoću greške u FSK sistemima sa koherentnom demodulacijom približno glasi:

$$P_e \cong \frac{1}{\sqrt{\pi} \frac{U_s(t_m)}{2\sigma}} \frac{1}{2} e^{-\frac{U_s^2(t_m)}{4\sigma^2}}$$

Ako uporedimo ovaj izraz sa izrazom za vjerovatnoću greške u prenosu poruka binarnim FSK signalom i nekoherentnom demodulacijom, vidi se da pri velikim odnosima $U_s(t_m)/2\sigma$, tj. pri velikim odnosima signal/šum, za jednake vjerovatnoće greške, u sistemu sa nekoherentnom demodulacijom treba da bude nešto veći od odnosa signal/šum FSK sistemu sa koherentnom demodulacijom. Pošto u sistemu sa nekoherentnom demodulacijom nema potrebe za lokalnim oscilatorima, onda u ovim uslovima oni imaju određenu prednost.

SISTEMI PRENOSA SA PSK

U sistemima prenosa sa faznom modulacijom značajni parametar sinusoidalnog nosioca je njegova faza. U idealnim uslovima ovakav signal ima konstantnu amplitudu i učestanost, trajanje signalizacionih intervala je konstantno, a relativna faza nosioca u tim intervalima uzima diskretne vrijednosti iz jednog konačnog skupa kojim se opisuje prenošena poruka. Binarni PSK signal prikazan je na slici.



Sistemi sa faznom modulacijom našli su vrlo široku primjenu u prenosu poruka radio-relejnim i drugim radio-vezama. Ovaj tip modulacije pod određenim uslovima ima neke osobine koje ga stavljaju ispred ostalih tipova modulacije. Tako npr.:

- zahtjevana vršna snaga u njemu je manja od snage u M-arnom ASK sistemu,
- širina potrebnog opsega učestanosti za prenos može biti manja od one koja se traži u FSK sistemima,
- sama realizacija je često jednostavna, i što je naročito važno,
- sistemi sa faznom modulacijom mogu da budu manje osjetljivi na izobličenja nastala u prenosu.

Po svojoj prirodi fazna modulacija kao i frekvencijska modulacija predstavlja nelinearan proces. Međutim, kada je riječ o prenosu *digitalnih signala fazno modulisanim nosiocem*, moguće je, uz određene uslove, pokazati da tako fazno modulisani nosilac ustvari predstavlja dva u kvadraturi amplitudski modulisana signala sa dva bočna opsega. Zato se tada često govori o PSK-ASK sistemu.

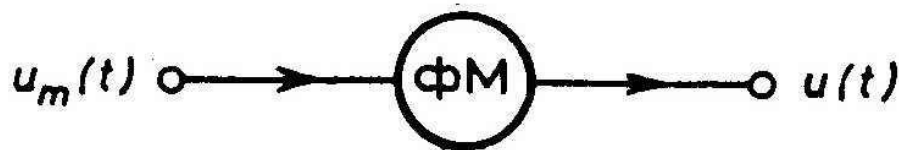
Pretpostavimo da je digitalni signal u osnovnom opsegu učestanosti koji treba prenijeti opisan izrazom:

$$u_m(t) = \sum_{k=-N}^N a_k \Pi(t - kT)$$

$$\Pi(t - kT) = \begin{cases} 1, & kT - \frac{T}{2} \leq t \leq kT + \frac{T}{2} \\ 0, & \text{ostale vrijednosti } t \end{cases}$$

$$a_k = \{s_1, s_2, \dots, s_M\}$$

Ako modulišući signal $u_m(t)$ dovedemo na ulaz faznog modulatora prikazanog šematski na slici, na izlazu iz modulatora se dobija PSK signal predstavljen izrazom:



$$u(t) = U_0 \cos[\omega_0 t - c_\varphi u_m(t)] =$$

$$U_0 \cos\left[\omega_0 t - \sum_{k=-N}^N \varphi_k \Pi(t - kT)\right]$$

$\omega_0 = 2\pi f_0$ je konstantna učestanost nosioca, U_0 njegova konstantna amplituda, a parametar φ_k je nosilac poruke i u k -tom signalizacionom intervalu ima jednu od diskretnih vrijednosti

$$\varphi_k = \Phi_i = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_M\}, \quad \sum_{i=1}^M \Phi_i = 2\pi$$

$$\varphi_k = c_\varphi a_k = c_\varphi s_i$$

C_φ predstavlja konstantu faznog modulatora.

Zahvaljujući specijalnom obliku funkcije $\Pi(t)$, važi sledeći identitet:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 \cos \left[\omega_0 t - \sum_{k=-N}^N \varphi_k \Pi(t - kT) \right] \equiv \sum_{k=-N}^N U_0 \Pi(t - kT) \cos(\omega_0 t - \varphi_k) = \\ &= \left[\sum_{k=-N}^N U_0 \Pi(t - kT) \cos \varphi_k \right] \cos \omega_0 t + \left[\sum_{k=-N}^N U_0 \Pi(t - kT) \sin \varphi_k \right] \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

Ovaj izraz pokazuje da je $u(t)$ ustvari zbir dva ASK-2BO signala čiji su nosioci u kvadraturi. Spektar svakog od njih je neograničen, jer su takvi i spektri modulišućih signala.

SISTEMI PRENOSA SA BINARNOM FAZNOM MODULACIJOM (BPSK) I KOHERENTNOM DEMODULCIJOM

Pretpostavimo da binarni polarni modulišući signal

$$u_m(t) = U_0 \sum_{k=-N}^N a_k \Pi(t - kT), \quad a_k = \{-1, 1\}$$

fazno moduliše sinusoidalni nosilac. Tada će se na njegovom izlazu dobiti signal oblika:

$$u(t) = U_0 \sum_{k=-N}^N a_k \Pi(t - kT) \cos \omega_0 t$$

Zahvaljujući pomenutom svojstvu funkcije $\Pi(t)$, može se napisati:

$$u(t) = U_0 \cos \left[\omega_0 t - \sum_{k=-N}^N \varphi_k \Pi(t - kT) \right], \quad \varphi_k = \{0, \pi\}$$

Kako faza uzima jednu od dvije moguće vrijednosti, a $\Pi(t)$ ima vrijednost 1 u dijelu gdje postoji, to je najprostiji oblik BPSK signala:

$$u(t) = \pm U_0 \cos \omega_0 t$$

Ako se sada ovakav signal u prijemniku dovede na ulaz produktnog demodulatora, (koherentna demodulacija), na izlazu iz demodulatora se dobija demodulisani signal oblika:

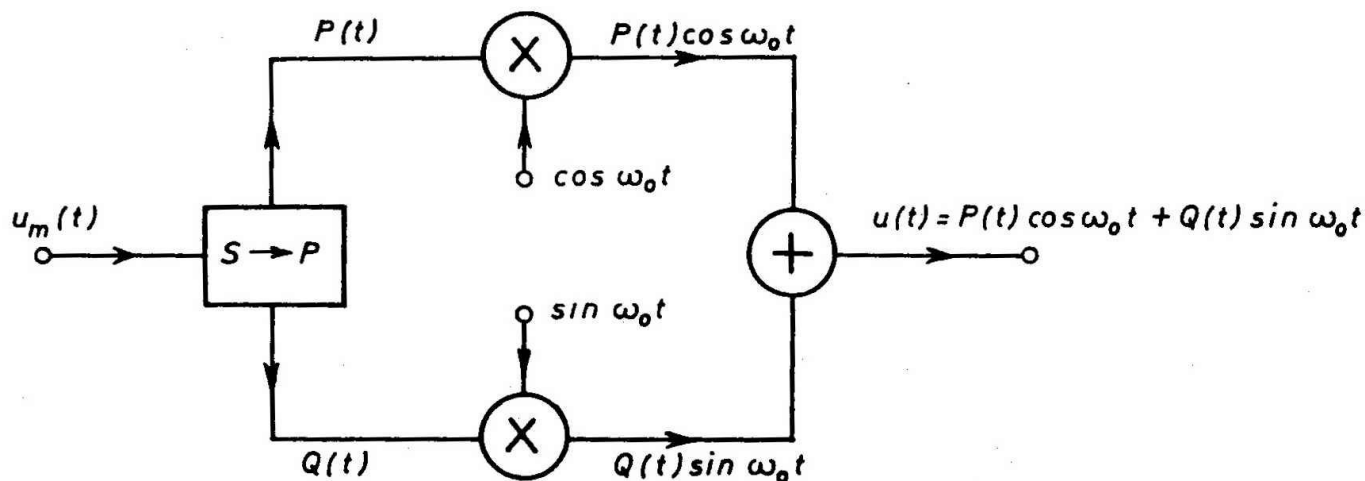
$$u_D(t) = U_0 \sum_{k=-N}^N a_k \Pi(t - kT)$$

Ovaj sistem (BPSK) je, sa aspekta performansi, identičan sa slučajem prenosa binarnog ASK-2BO signala, pa sve što je tamo rečeno važi i ovdje, uključujući i izraze za vjerovatnocu greške. Sa povećanjem broja nivoa ovo više ne važi.

$$P_{e \min} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{P'_{S(2BO)}}{2S'_N B_T}}$$

SISTEMI PRENOSA SA KVATERNARNOM FAZNOM MODULACIJOM (QPSK) I KOHERENTNOM DEMODULACIJOM

Kvaternarna fazna modulacija je višenivovski postupak modulacije kojim se uvećava broj mogućih značajnih stanja u signalu (QPSK ima 4 značajna stanja). Zahvaljujući činjenici da se povećava broj nivoa, štedi se na potrebnoj širini sistema za prenos i povećava se brzina prenosa. Blok šema sistema je prikazana na slici.



Binarna povorka $u_m(t)$ koju treba prenijeti pretvara se u konvertoru “serije u paralelu” u dvije binarne povorke na sledeći način:

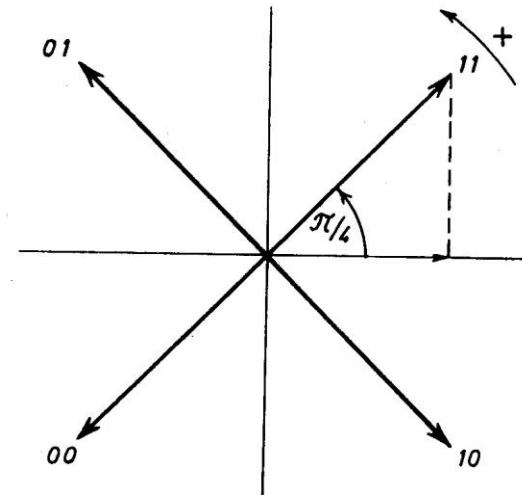
1. Povorka $P(t)$ se obrazuje od neparnih bita iz povorke $u_m(t)$ i ona predstavlja polarni binarni signal čije je trajanje signalizacionog intervala dva puta duže od trajanja signalizacionog intervala T u povorci $u_m(t)$.
2. Povorka $Q(t)$ se obrazuje od parnih bita povorke $u_m(t)$ i ona predstavlja polarni binarni signal čije je trajanje signalizacionog intervala jednako $2T$.

Sada svaka povorka u modulatoru moduliše odgovarajući nosilac, tako da se dobijaju dva u kvadraturi ASK-2BO signala. Sabrani u kolu za sumiranje, oni daju kvaternarni PSK signal.

$$u(t) = P(t)\cos \omega_0 t + Q(t)\sin \omega_0 t$$

Pošto su $P(t)$ i $Q(t)$ polarni binarni signali, oni mogu da imaju vrijednost $+U_0$ ili $-U_0$. Stoga su moguće četiri različite kombinacije vrijednosti pojedinačnih povorki koje predstavljamo fazorskim dijagramima, kao na slici.

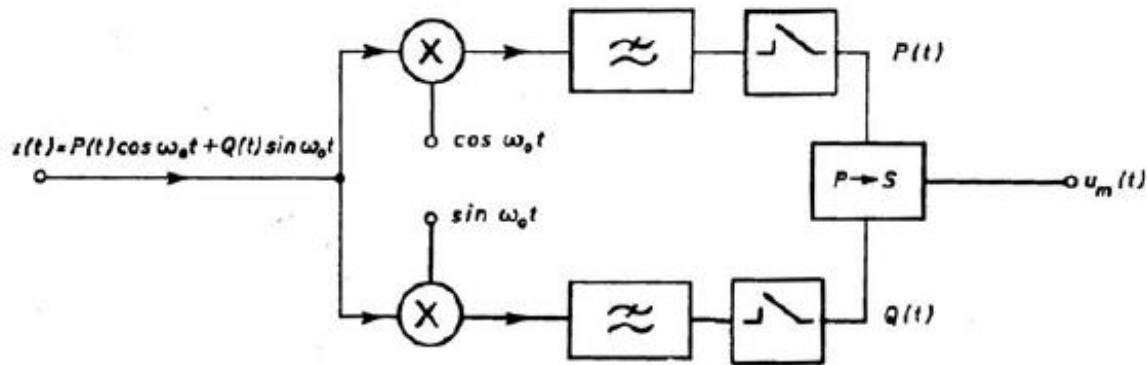
$P(t)$	$Q(t)$	Binarna kombinacija
U_0	U_0	1 1
U_0	$-U_0$	1 -1
$-U_0$	U_0	-1 1
$-U_0$	$-U_0$	-1 -1



Fazori su jednakog intenziteta, ali različitih faza, pa izraz za QPSK signal može da se napiše u obliku:

$$u_{QPSK}(t) = \text{Re}\left\{\sqrt{2}U_0 e^{j(\omega_0 t - \varphi_i)}\right\} = \sqrt{2}U_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_i), \quad \varphi_i = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

Što se tiče demodulacije QPSK signala ona se obavlja prema šemi sa slike.



Kao što se vidi koherentnom demodulacijom se dobijaju povorke $P(t)$ i $Q(t)$ koje se preko konvertora “paralela-u-seriju” pretvaraju u poslati signal $u_m(t)$.

Na kraju naglasimo da je propusni opseg učestanosti sistema u kojem se prenose binarni fazno modulisani signali **dva puta širi** od propusnog opsega sistema u kome se sa jednakim ekvivalentnim binarnim protokom prenose kvaternarni fazno modulisani signali.

Na sličan način, samo sa komplikovanijim šemama, se mogu realizovati oktonarni ili uopšte M-arni PSK sistemi.

DIFERENCIJALNA FAZNA MODULACIJA (DPSK)

Diferencijalna fazna modulacija predstavlja jedno specijalno rješenje u prenosu digitalnih signala faznom modulacijom. Njena osnovna prednost je ta što za demodulaciju diferencijalno fazno moduliranih signala nije potreban lokalni nosilac u prijemniku.

Diferencijalno fazno modulirani signal predstavlja kombinaciju diferencijalnog kodiranja i fazne modulacije. Dobija se na sledeći način:

Neka je binarni unipolarni signal koji treba prenijeti $u'_m(t)$ predstavljen odgovarajućom povorkom "1" i "0". Na osnovu ove povorke generiše se povorka diferencijalno kodiranog signala kojoj odgovara signal $u_m(t)$. Kodiranje se vrši na sledeći način:

- prvi bit u povorci je proizvoljan, 1 ili 0;
- dalje, svakoj 0 originalne povorke odgovara u diferencijalno kodiranoj povorci promijenjeno stanje u odnosu na stanje iz prethodnog intervala, dok svakoj 1 iz originalne povorke odgovara nepromijenjeno stanje u odnosu na stanje u njenom prethodnom značajnom intervalu.

Ako se dobijena povorka opiše binarnim polarnim signalom $u_m(t)$ i ako se on dovede na produktni modulator kao modulišući signal, na njegovom izlazu će se dobiti diferencijalno fazno modulirani signal $u(t)$. U njemu, binarnoj brojci 1 odgovara faza $\Phi=0$, a binarnoj brojci 0 faza $\Phi=\pi$.

Ilustrujmo ovo na sledeci način:

Originalna povorka

0 1 0 1 0 0 1 1 0

Diferencijalno kodirana povorka

1 0 0 1 1 0 1 1 1 0

Faza DPSK signala

0 π π 0 0 π 0 0 0 π

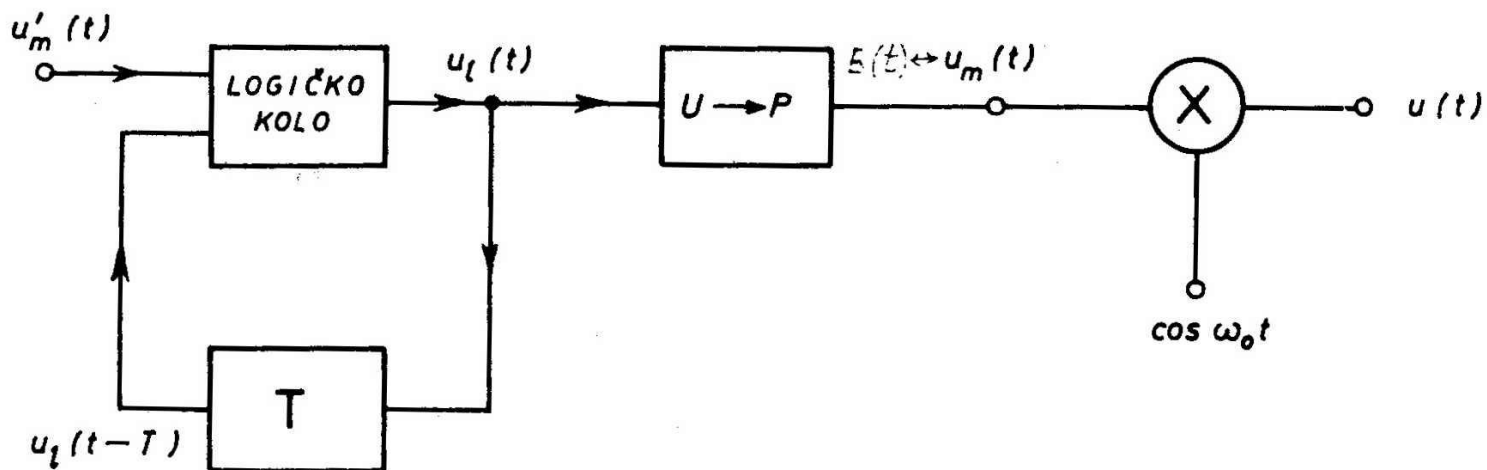
Promjena faze

- + - + - - + + -

Primljena poruka

0 1 0 1 0 0 1 1 0

Blok šema prema kojoj je moguće generisati diferencijalno fazno modulisani signal je prikazana na slici.

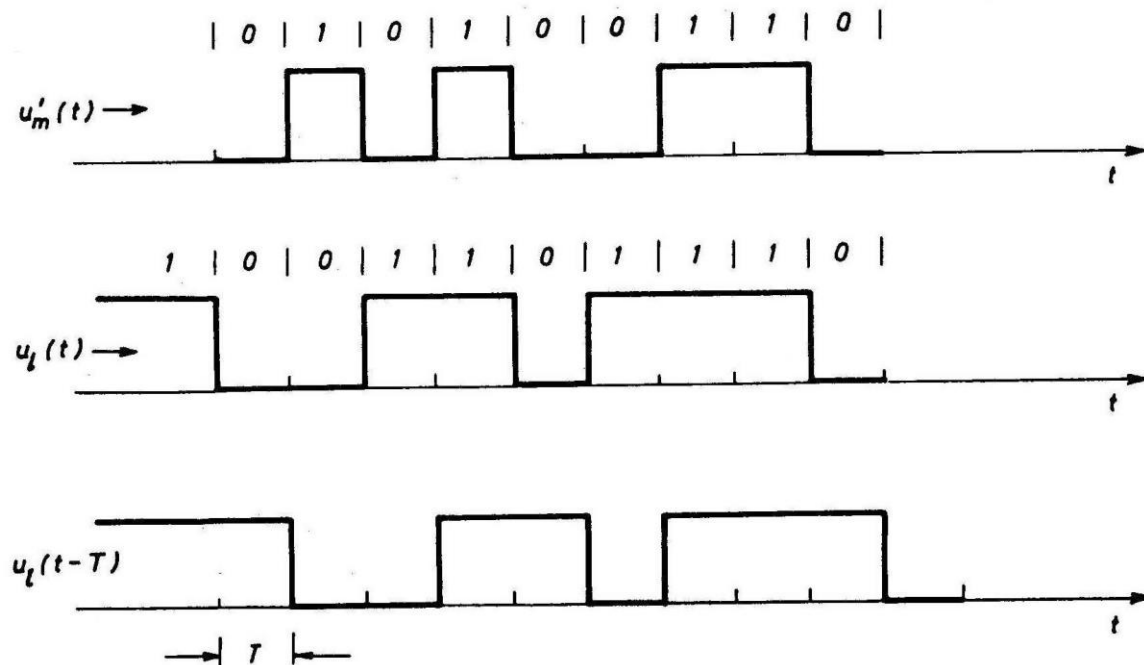


Ovaj sklop radi na sledeći način: ako signal $u'_m(t)$ koji se direktno dovodi na logičko kolo i signal $u_l(t-T)$ koji dolazi na logičko kolo preko kola za kašnjenje T (kašnjenje T je ravno trajanju jednog signalizacionog intervala) predstavljaju istu binarnu cifru u posmatranom signalizacionom intervalu (obje cifre su 1 ili su obje cifre 0), onda se na izlazu iz logičkog kola dobija unipolarni signal $u_l(t)$ koji u tom intervalu predstavlja brojku 1; u protivnom dobija se signal koji odgovara brojci 0. Dobijeni signal $u_l(t)$ je *diferencijalno kodirani signal*. On se zatim transformiše u *polarni* signal $u_m(t)$ kojim se moduliše nosilac. Na izlazu iz modulatora tada se dobija *diferencijalno fazno modulisan signal* $u(t)$ jednak:

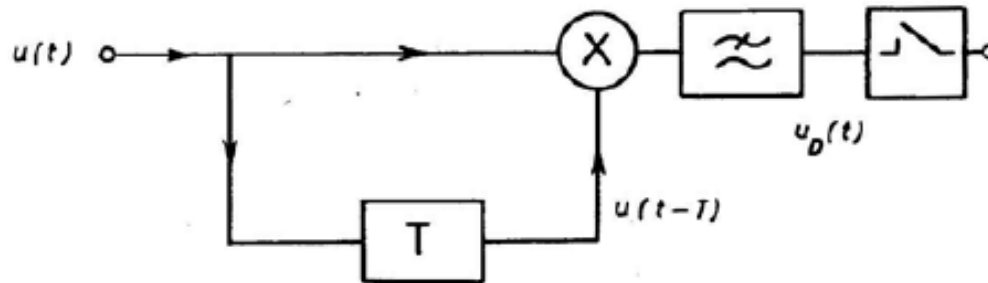
$$u_{DPSK}(t) = u(t) = \frac{u_m(t)}{U} U_0 \cos \omega_0 t, \quad U = const.$$

$u_m(t)$ u trenutku odabiranja ima vrijednost $+U$ ili $-U$, pa i dobijeni DPSK signal ima dvije moguće vrijednosti faze.

Talasnici signala koji su karakteristični u procesu formiranja diferencijalno kodiranog signala prikazani su na slici.



Demodulacija diferencijalno fazno modulisanog signala obavlja se prema šemi sa slike.



Na jedan ulaz produktog demodulatora dovodi se signal $u(t)=u_{DPSK}(t)$, a na drugi ulaz isti taj signal pomjeren u vremenu za iznos trajanja jednog signalizacionog intervala T . Na taj način, pošto se filtrom propusnikom niskih učestanosti odstrane komponente iz opsega oko učestanosti $2\omega_0$ dobija se demodulisani signal:

$$u_D(t) \propto u_m(t)u_m(t-T) \frac{U_0^2}{U^2} \cos \omega_0 T$$

Ako se ω_0 i T izaberu tako da je $\omega_0 T = n\pi$, $n = 1, 2, \dots$, onda će demodulisani signal $u_D(t)$ uvijek imati najveću, bilo pozitivnu, bilo negativnu, vrijednost.

Istaknimo to da se poruka sadrži u promjeni, odnosno, zadržavanju faze iz prethodnog signalizacionog intervala.

I pored prednosti diferencijalno fazno modulisanih sistema koja se ogleda ne samo u tome što za demodulaciju nije potreban lokalni nosilac, već i u tome što je njihova realizacija vrlo jednostavna, oni imaju i jedan nedostatak. Naime, ukoliko se dogodi da se u posmatranom signalizacionom intervalu izmijeni signal toliko da predstavlja onu drugu binarnu cifru, onda će se u donošenju odluke dva puta pogriješiti: biće pogrešna odluka o promjeni značajnog stanja u odnosu na prethodni interval i u odnosu na onaj sledeći. Dakle, greške se javljaju u parovima.

VJEROVATNOĆA GREŠKE ZA PSK SISTEME

Izraze za vjerovatnoću greške izvešćemo za slučaj prenosa poruka fazno modulisanim nosiocem i koherentnom demodulacijom.

Pretpostavimo da imamo idealni fazno modulisan signal opisan u nekom signalizacionom intervalu izrazom:

$$u_s(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_i), \quad 0 \leq t \leq T$$

φ_i predstavlja značajan parametar signala i on može da ima jednu od vrijednosti:

$$\varphi_i = \frac{2\pi i}{M}, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Demodulacija ovog signala se obavlja koherentnim demodulatorom. On predstavlja sklop koji u stvari mjeri fazu u toku trajanja signalizacionog intervala T na osnovu čega se donosi odluka.

Pretpostavimo, dalje, da se signalu na ulazu u demodulator superponira uskopojasni Gaussov šum čija je srednja vrijednost 0 varijansa σ^2 . Tada će na ulazu u demodulator suma signala i šuma biti:

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_i) + n_c(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_i) + n_s(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_i), \quad 0 \leq t \leq T$$

Ovaj izraz može da se predstavi i u sledećem obliku:

$$u(t) = V(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_i - \theta(t)] = V(t) \cos[\omega_0 t + \alpha(t)]$$

Faza složenog talasnog oblika $u(t)$ može da se prikaže:

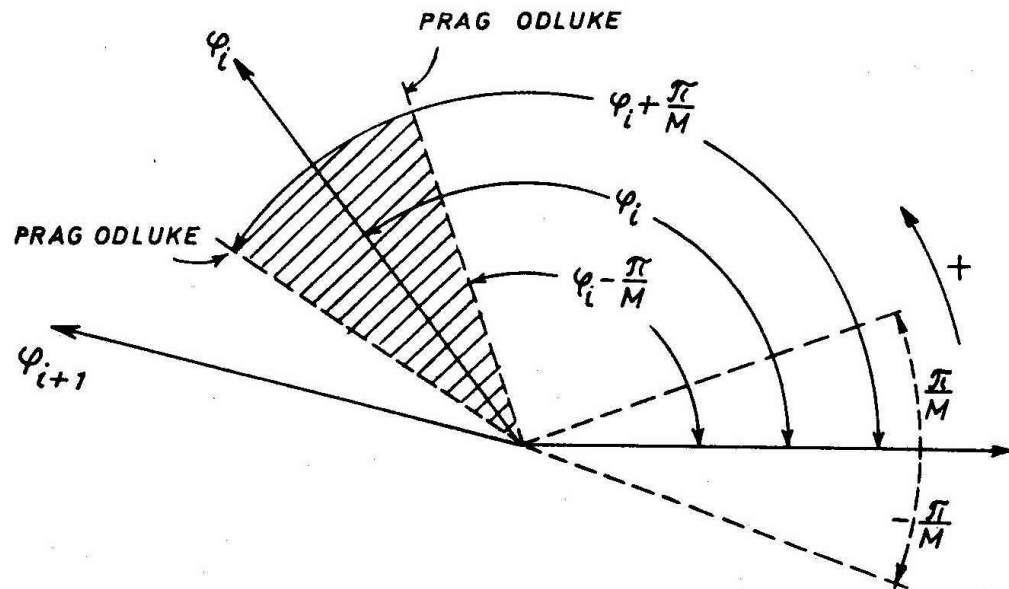
$$\alpha(t) = \varphi_i + \arctg \frac{n_s(t)}{U_0 + n_c(t)} = \varphi_i + \theta(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

Na osnovu faze primljenog signala se donosi odluka o poslatom signalu. Ona se sastoji od dvije komponente. Prva je faza signala u posmatranom intervalu da nema šuma, a druga komponenta faze usled prisutnog šuma.

Pošto je ugao od 0 do 2π ravnomjerno podijeljen na M dijelova, to je sa slike jasno da će do greške u odlučivanju doći uvijek kada demodulator izmjeri fazu $\alpha(t)$ koja se za poslato φ_i nalazi izvan granica

$$\varphi_i - \frac{\pi}{M} \leq \alpha(t) \leq \varphi_i + \frac{\pi}{M}$$

Sve vrijednosti faza unutar šrafirane oblasti biće tretirane kao φ_i .



Imajući u vidu da je $\alpha(t)$ data izrazom:

$$\alpha(t) = \varphi_i + \theta(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

dobija se da će se pogrešna odluka donositi uvijek kada dodatna faza izazvana šumom $\theta(t)$ bude izvan granica

$$-\frac{\pi}{M} \leq \theta(t) \leq \frac{\pi}{M}$$

Vjerovatnoća greške u prenosu poruka M-arnom faznom modulacijom i koherentnom demodulacijom biće:

$$P_e = 1 - \int_{-\frac{\pi}{M}}^{\frac{\pi}{M}} p_\theta(\theta) d\theta$$

Funkcija gustine vjerovatnoće faze sume signal i šuma je:

$$p_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-A'_N} \left[1 + \sqrt{4\pi A'_N} \cos \theta e^{A'_N \cos^2 \theta} \Phi\left(\sqrt{2A'_N} \cos \theta\right) \right], \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$A'_N = \frac{U_0^2}{2\sigma^2}$$

Zamjenom ovog izraza u integral za izračunavanje vjerovatnoće greške u opštem slučaju se ne može riješiti u zatvorenom obliku, već se do rješenja može doći grafičkom ili numeričkom integracijom. Izuzetak od ovog čine slučajevi u kojima je $M=2$ i $M=4$.

Tako se za slučaj binarne fazne modulacije i koherentne demodulacije nalazi da vjerovatnoća greške iznosi:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{A'_N} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{U_0}{\sqrt{2}\sigma}$$

Ako se ovaj izraz uporedi sa izrazom za vjerovatnoću greške pri prenosu ASK sistemom i koherentnom demodulacijom, vidi se da su oni isti. Isto tako, dobijeni izraz je jednak izrazu za vjerovatnoću greške u prenosu poruka binarnim polarnim signalima u osnovnom opsegu učestanosti.

U slučaju kvaternarne modulacije i koherentne demodulacije, za vjerovatnoću greške se dobija:

$$P_e = 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{A'_N}{2}} \right)^2 = \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{A'_N}{2}} - \left(\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{A'_N}{2}} \right)^2$$

Treba istaći da dobijeni izraz za vjerovatnoću greške predstavlja vjerovatnoću greške po simbolu, po kvaternarnom digitu, i A'_N u ovom izrazu se odnosi na taj kvaternarni sistem koji se posmatra.

UPOREĐENJE SISTEMA ZA PRENOS DIGITALNIH SIGNALA

Da bi se sistemi za prenos digitalnih signala mogli međusobno uporediti potrebno je izabrati kriterijume prema kojima će se vršiti poređenje. Usvojimo da taj kriterijum bude vjerovatnoća greške u prenosu do koje dolazi usled uticaja slučajnog šuma, tj. boljim će se smatrati onaj sistem u kome je za jednake odnose signal/šum na ulazu u prijemnik vjerovatnoća greške manja.

Pod odnosom signal/šum A_N' podrazumijevaće se odnos *srednje snage signala na ulazu u prijemnik* i *srednje snage šuma u toj istoj tački* a u opsegu učestanosti koji je brojno jednak ekvivalentnom binarnom protoku:

$$A_N' = \frac{P_S'}{N_0' B_T}$$

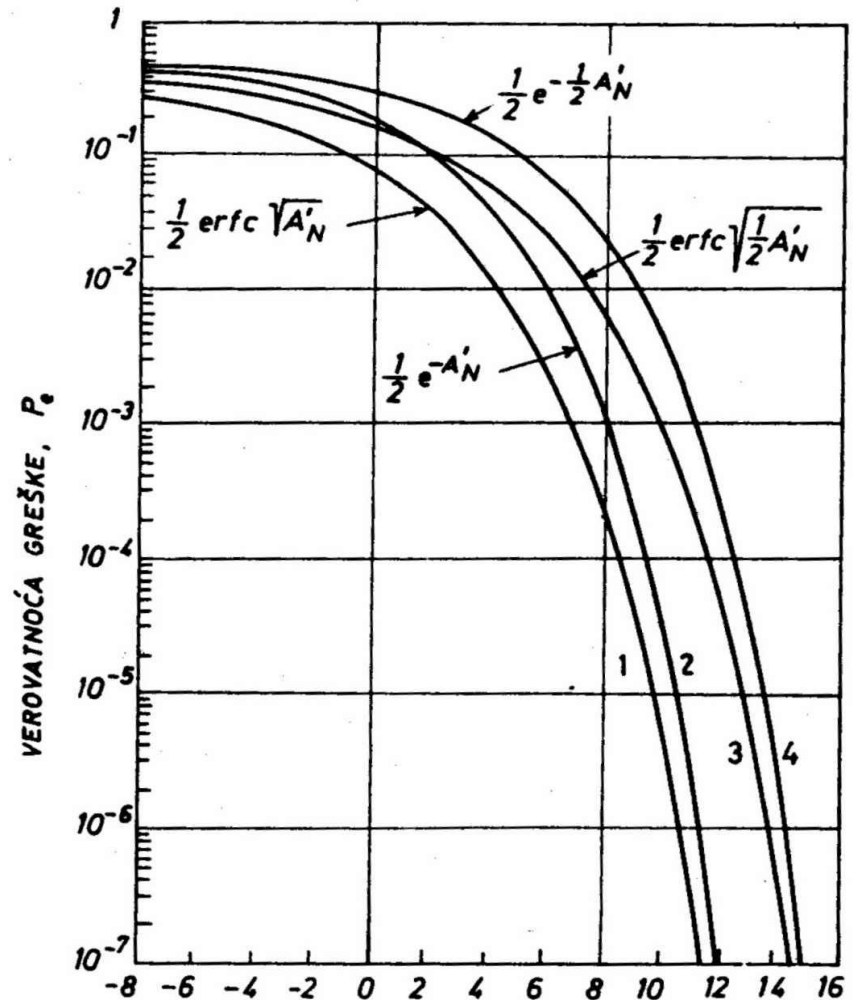
U ovom izrazu P_S' je srednja snaga signala, N_0' je spektralna gustina srednje snage slučajnog šuma dcfinisana za pozitivne učestanosti, a B_T predstavlja ekvivalentni binarni protok izražen u bitima u sekundi.

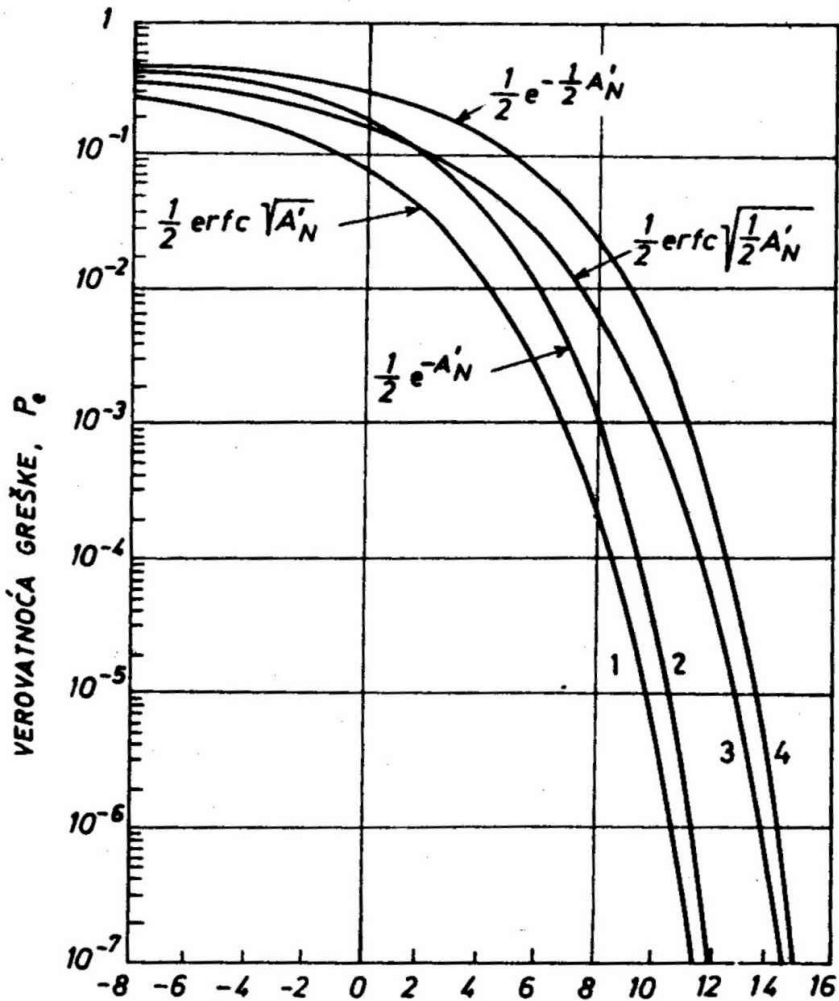
Svi obrasci za izračunavanje vjerovatnoće greške P_e koji su izvedeni mogu se pod određenim uslovima izraziti u funkciji odnosa A_N' . Ti uslovi su sledeći:

1. Smatraće se da sve greške potiču isključivo usled prisustva aditivnog, bijelog Gaussovog šuma na ulazu uprijemnik,
2. Cijeli sistem je optimalno dimenzionisan u smislu minimizacije vjerovatnoće greške.

U ovim okolnostima vjerovatnoća greške zavisi isključivo od odnosa A_N' , odnosno, od odnosa srednje snage signala na ulazu u prijemnik koja je direktno srazmjerna srednjoj snazi na izlazu iz predajnika i snage šuma u opsegu učestanosti koji je brojno jednak ekvivalentnom binarnom protoku.

Izračunavši na ovaj način vjerovatnoće greške u raznim sistemima prenosa digitalnih signala, na slici su nacrtani odgovarajući dijagrami.



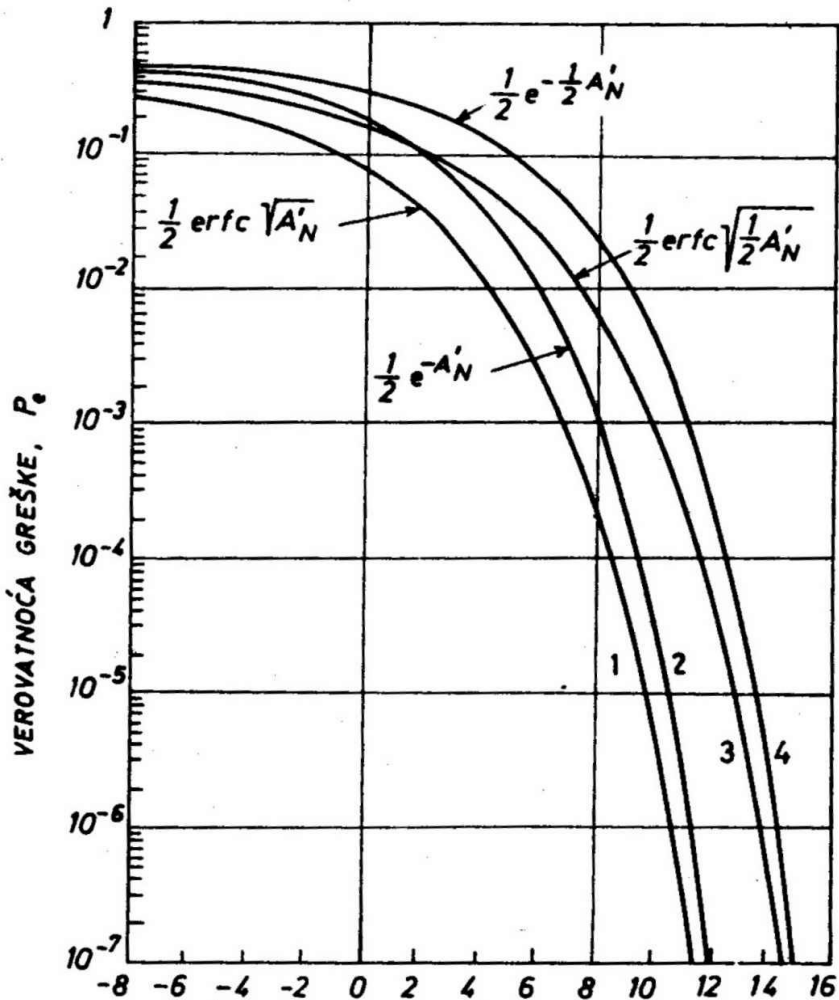


Kriva 1 predstavlja vjerovatnoću greške koja važi za sledeće slučajeve:

- za sistem u kome se prenose binarni polarni signali u osnovnom opsegu učestanosti;
- za sistem prenosa sa ASK i koherentnom demodulacijom u kome je nosilac modulisan binarnim polarnim signalom;
- za sistem prenosa sa binarnom PSK i koherentnom demodulacijom;
- za sistem prenosa sa kvaternarnom PSK i koherentnom demodulacijom.

Pri ovom, P_e predstavlja vjerovatnoću greške po bitu.

Kriva 2 predstavlja vjerovatnoću greške pri prenosu poruka binarnim diferencijalno fazno modulisanim signalom.

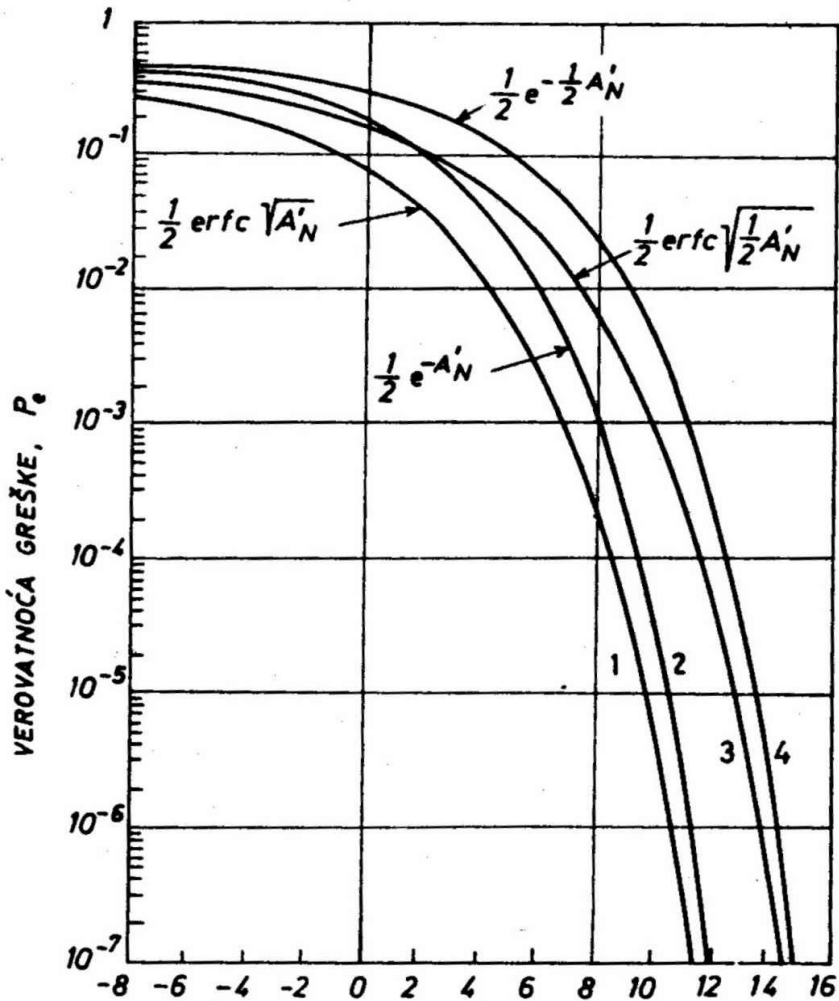


Kriva 3 predstavlja vjerovatnoću greške u sledećim slučajevima:

- u sistemu u kome se prenose binarni unipolarni signali u osnovnom opsegu učestanosti;
- za sistem prenosa sa ASK i koherentnom demodulacijom u kome se prenose binarni signali tipa »sve ili ništa«;
- u sistemu prenosa sa binarnom FSK i koherentnom demodulacijom.

Kriva 4 predstavlja vjerovatnoću greške u dva slučaja:

- u sistemu prenosa sa FSK i nekoherentnom demodulacijom;
- u sistemu prenosa sa ASK i nekoherentnom demodulacijom u kome se prenose signali tipa »sve ili ništa«, ali pod uslovom da je u ovom poslednjem slučaju odnos signal/šum dovoljno velik (veći od 12 dB).



Sa ovih dijagrama vidi se da je u sistemima prenosa kojima odgovara kriva 3 potrebno da snaga signala bude dva puta, odnosno, za 3 dB veća od snage u sistemima kojima odgovara kriva 1, pa da vjerovatnoća greške P_e bude jednaka. Treba još zapaziti i to da za vrlo male vrijednosti vjerovatnoće greške, potrebne snage signala u sistemima kojima odgovaraju krive 1 i 2 kao i u sistemima kojima odgovaraju krive 3 i 4, vrlo se malo razlikuju.